UNIVASF – Geometria Analítica – Prof. João Alves – Lista 2.5 (v. 01/06/2025)

Solução

Justifique apropriadamente o que achar que deve ser justificado.

Questão 1 (1,8 ponto)**.** Na Figura 2, suponha que $\ell = 2$. Considere que as bases destras são as que têm orientação positiva. Pensando geometricamente, determine:

(a) $\overrightarrow{G_3E_3} \cdot \overrightarrow{A_1I_1}$.

Solução. $\overrightarrow{G_3E_3} \cdot \overrightarrow{A_1I_1} = 0$, pois $\overrightarrow{G_3E_3} \perp \overrightarrow{A_1I_1}$. □

(b) $\overrightarrow{A_2D_2} \cdot \overrightarrow{A_2I_2}$.

Solução. $\overrightarrow{A_2D_2} \cdot \overrightarrow{A_2I_2} = \|\overrightarrow{A_2D_2}\|\|\overrightarrow{A_2I_2}\| \cos \operatorname{ang}\left(\overrightarrow{A_2D_2}, \overrightarrow{A_2I_2}\right) = 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 8\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 8.$ □

(c) $\operatorname{proj}_{\overrightarrow{E_1A_1}} \overrightarrow{A_1I_2}$.

Solução. $\operatorname{proj}_{\overrightarrow{E_1A_1}} \overrightarrow{A_1I_2} = \overrightarrow{A_1I_1}$, pois $\overrightarrow{A_1I_1}$ é o único vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{w} \parallel \overrightarrow{E_1A_1}$ e $(\overrightarrow{A_1I_2} - \vec{w}) \perp \overrightarrow{E_1A_1}$ (ver Figura 1(i)). □

(d) $\operatorname{proj}_{\overrightarrow{D_2D_3}} \overrightarrow{E_1F_1}$.

Solução. $\operatorname{proj}_{\overrightarrow{D_2D_3}} \overrightarrow{E_1F_3} = \vec{0}$, pois $\overrightarrow{E_1F_1} \perp \overrightarrow{D_2D_3}$. □

(e) $\overrightarrow{F_1D_1} \cdot \overrightarrow{F_1K}/\|\overrightarrow{F_1K}\|$, onde K é o ponto do segmento $[\![G_1, I_1]\!]$ tal que $\operatorname{ang}(\overrightarrow{KI_1}, \overrightarrow{KF_1}) = \pi/6$.

Solução. Veja, na Figura 1(ii), que os ângulos $D_1\widehat{F_1}K$ e $I\widehat{K}F_1$ têm a mesma medida θ, que, de acordo com o enunciado, vale $\pi/6$. Assim, $\operatorname{ang}\left(\overrightarrow{F_1D_1}, \overrightarrow{F_1K}\right) = \operatorname{ang}\left(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KF_1}\right) = \pi/6$. Logo,

$$\frac{\overrightarrow{F_1D_1} \cdot \overrightarrow{F_1K}}{\|\overrightarrow{F_1K}\|} = \|\overrightarrow{F_1D_2}\| \cos \operatorname{ang}\left(\overrightarrow{F_1D_1}, \overrightarrow{F_1K}\right) = 4 \cdot \cos \operatorname{ang}\left(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KF_1}\right) = 2\sqrt{3}.$$ □

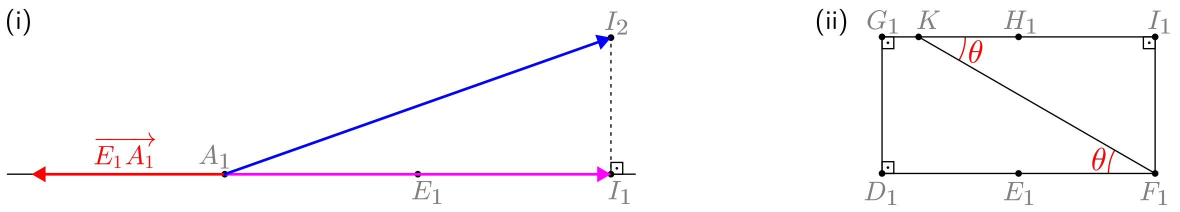

FIGURA 1

(f) $\overrightarrow{I_2A_2} \wedge \overrightarrow{A_3E_3}$.

Solução. $\overrightarrow{I_2A_2} \wedge \overrightarrow{A_3E_3} = \vec{0}$, pois $\overrightarrow{I_2A_2} \parallel \overrightarrow{A_3E_3}$. □

(g) $\overrightarrow{B_2B_1} \wedge \overrightarrow{B_2C_1}$.

Solução.

$$\overrightarrow{B_2B_1} \wedge \overrightarrow{B_2C_1} \quad = \quad \vec{v} \text{ tal que } \begin{cases} \vec{v} \upuparrows \overrightarrow{B_2E_2}, \\ \|\vec{v}\| = 2 \cdot \text{área}([\![B_1, B_2, C_1]\!]) = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 4. \end{cases}$$

Logo, $\overrightarrow{B_2B_1} \wedge \overrightarrow{B_2C_1} = \overrightarrow{B_2H_2}$. □

(h) $[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1E_2}]$.

Solução. Observe que a base $\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1E_2}\right)$ tem orientação negativa. Então seu produto misto é menos o volume do paralelepípedo $[\![A_1, B_1, B_2, A_2, E_2, F_2, F_3, E_3]\!]$. O volume deste paralelepípedo é área da base vezes altura, ou seja: $\text{área}([\![A_1, B_1, B_2, A_2]\!]) \cdot \operatorname{dist}(A_1, D_1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Portanto, $\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1E_2}\right] = -8$. □

(i) $[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1B_3}]$.

Solução. $\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1B_3}\right] = 0$, pois os vetores $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1B_1}$ e $\overrightarrow{A_1B_3}$ são coplanares. □

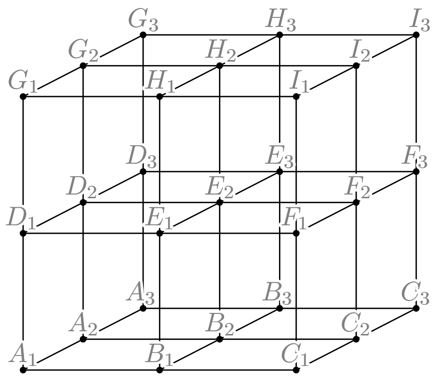

FIGURA 2. Oito cubos de lado ℓ, unidos pelas faces, formando um cubo de lado 2ℓ.

Questão 2 (peso 1,2, uniformemente distribuído entre os itens). Na Figura 2:

(a) Os planos

$$\pi_1 : X = I_3 + \lambda\overrightarrow{A_1D_2} + \mu\overrightarrow{A_1F_2} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$
$$\pi_2 : X = H_1 + \lambda\overrightarrow{E_1G_2} + \mu\overrightarrow{E_1I_2} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

são coincidentes, paralelos disjuntos ou transversais?

Solução. São paralelos porque as triplas $(\overrightarrow{A_1D_2}, \overrightarrow{A_1F_2}, \overrightarrow{E_1G_2})$ e $(\overrightarrow{A_1D_2}, \overrightarrow{A_1F_2}, \overrightarrow{E_1I_2})$ são LD. Não são coincidentes porque, por exemplo, $I_3 \in \pi_1$ mas $I_3 \notin \pi_2$. Por serem planos paralelos não coincidentes, só podem ser planos paralelos disjuntos. □

(b) Dê duas equações vetoriais para o plano π que contém o triângulo $[\![B_1, C_2, E_2]\!]$.

Solução. $\pi : X = B_1 + \lambda\overrightarrow{B_1C_2} + \mu\overrightarrow{B_1E_2} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$

$$\pi : X = C_2 + \lambda\Big(2\overrightarrow{C_2E_2}\Big) + \mu\overrightarrow{B_1E_2} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

(Há muitas outras respostas corretas para este item (b).) □

(c) Dê uma equação vetorial para o plano π' que passa pelo ponto I_1 e é paralelo ao plano π_1 do item (a).

Solução. $\pi' : X = I_1 + \lambda\overrightarrow{A_1D_2} + \mu\overrightarrow{A_1F_2} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$ □

(d) Dê duas equações vetoriais para a reta r, perpendicular ao plano π (do item anterior), que passa por E_2.

Solução. Trata-se da reta $\langle E_2, I_1\rangle$. Duas equações vetoriais para ela são, por exemplo:

$$r : X = E_2 + \lambda\overrightarrow{E_2I_1} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$
$$r : X = A_3 - \lambda(3\overrightarrow{I_1E_2}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Apenas olhando a figura, pode ser dificil ter certeza de que a reta descrita no enunciado é realmente $\langle E_2, I_1\rangle$, embora a figura possa dar alguma intuicão a favor dessa conjectura. Para confirmar, note que, com relação ao sistema de coordenadas $\Sigma = B_2[B_1, C_2, E_2]$, temos $\overrightarrow{E_2I_1} = (1, 1, 1)$ e $\pi : x + y + z = 1$ (os valores de a, b, c, d nesta equação geral podem ser descobertos usando o fato que, de acordo com a figura, $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \in \pi$; substitui-se as coordenadas de cada um destes três pontos no lugar de x, y, z, em $ax + by + cz + d = 0$, formando um sistema de três equações lineares nas incógnitas a, b, c, d; a solução deste sistema dá os valores dos coeficientes e do termo independente da equação geral de π). Não temos garantias de que Σ é ortogonal, mas sabemos que seus eixos são perpendiculares e têm todos uma mesma unidade de medida. Assim, se Σ' é um sistema ortogonal obtido a partir de Σ via normalização da base, então, com relação a Σ', teremos $\overrightarrow{E_2I_1} = (k, k, k)$ e $\pi : kx + ky + kz = 1$, onde $k = \|\overrightarrow{B_2B_1}\| = \|\overrightarrow{B_2C_2}\| = \|\overrightarrow{B_2E_2}\|$. Ou seja, com relação a um sistema de coordenadas ortogonal, as coordenadas de $\overrightarrow{E_2I_1}$ são proporcionais (de fato, iguais) aos coeficientes de x, y, z na equação geral do plano π, o que nos diz que $\overrightarrow{E_2I_1}$ é paralelo aos vetores normais de π. □

(e) Avalie se a reta r (do item anterior) intersecta a reta s que, com relação ao sistema de coordenadas $\Sigma = B_2[B_1, C_2, E_2]$, é descrita pelas equações $x - 1 = y - 1 = -z/2$. determine-a.

Solução. De acordo com as equações $x - 1 = y - 1 = -z/2$, a reta s passa pelo ponto $(1, 1, 0) = C_1$ na direção do vetor $(1, 1, -2) = \overrightarrow{H_2C_1}$; então $s = \langle C_1, H_2\rangle$. Já vimos que $r = \langle E_2, I_1\rangle$. E, na figura, é evidente que as retas $\langle C_1, H_2\rangle$ e $\langle E_2, I_1\rangle$ são concorrentes. Portanto, r e s se intersectam. □

Questão 3 (peso 4,5, uniformemente distribuído entre os itens). Sejam $\vec{u} = (-3, -2, 8)$, $\vec{v} = (9, 1, 1)$, $\vec{w} = (-m/6, -3 + m, -1 + n)$ vetores, num sistema de coordenadas ortogonal positivamente orientado, tais que $\vec{u} \perp \vec{w}$ e $\vec{v} \perp \vec{w}$. Calcule:

(a) $\vec{w}$.

Solução. De $\vec{u} \perp \vec{w}$ e $\vec{v} \perp \vec{w}$, temos que:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad &\therefore \quad -3(-m/6) - 2(-3 + m) + 8(-1 + n) = 0 \\ &\therefore \quad m/2 + 6 - 2m - 8 + 8n = 0 \\ &\therefore \quad -3m/2 + 8n = 2, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \quad &\therefore \quad 9(-m/6)+1(-3+m)+1(-1+n)=0\\ &\therefore \quad -3m/2-3+m-1+n=0\\ &\therefore \quad -m/2+n=4. \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1):

$$-\frac{3m}{2}+8\Big(4+\frac{m}{2}\Big)=2 \quad \therefore \quad 4m-\frac{3m}{2}+32=2 \quad \therefore \quad \frac{5m}{2}=-30 \quad \therefore \quad m=-\frac{60}{5}=-12.$$

Usando $m=-12$ em (2), vem: $6+n=4 \therefore n=-2$. Portanto,

$$\vec{w}=\Big(-\frac{m}{6},\,-3+m,\,-1+n\Big)=\Big(-\frac{(-12)}{6},\,-3+(-12),\,-1+(-2)\Big)=(2,-15,-3). \qquad \square$$

(b) $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

Solução. Temos $\vec{u}=(-3,-2,8)$ e $\vec{v}=(9,1,1)$. Como o sistema de coordenadas é ortogonal e positivamente orientado,

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -3 & -2 & 8\\ 9 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 8\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}-3 & 8\\ 9 & 1\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 9 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=-10\vec{\imath}+75\vec{\jmath}+15\vec{k}=(-10,75,15). \qquad \square$$

(c) $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$.

Solução. De $\vec{u}=(-3,-2,8)$ e $\vec{v}=(9,1,1)$, pelo fato de o sistema de coordenadas é ortogonal, temos:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|&=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+8^2}=\sqrt{9+4+64}=\sqrt{77},\\ \|\vec{v}\|&=\sqrt{9^2+1^2+1^2}=\sqrt{81+1+1}=\sqrt{83}.\end{aligned} \qquad \square$$

(d) $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.

Solução. Relembre que $\vec{u}=(-3,-2,8)$ e $\vec{v}=(9,1,1)$. A ortogonalidade do sistema de coordenadas nos permite usar a fórmula $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$, para $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, com a qual obtemos $\vec{u}\cdot\vec{v}=-27-2+8=-21$. Daí, por $\|\vec{v}\|=\sqrt{83}$ (valor obtido no item anterior), segue que

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}=-\frac{21}{83}(9,1,1)=\Big(-\frac{189}{83},-\frac{21}{83},-\frac{21}{83}\Big). \qquad \square$$

(e) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$.

Solução. De $\vec{u}=(-3,-2,8)$ e $\vec{v}=(9,1,1)$, temos:

$$\vec{u}+\vec{v}=(6,-1,9), \qquad \vec{v}-\vec{v}=(-12,-3,7)$$

$$\therefore \quad (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=6(-12)+(-1)(-3)+9\cdot7=-72+3+63=-6.$$

No cálculo do produto escalar, usamos o fato que o sistema de coordenadas é ortogonal. $\square$

(f) $(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})$.

Solução. Conforme já calculado no item anterior, $\vec{u}+\vec{v}=(6,-1,9)$ e $\vec{v}-\vec{v}=(-12,-3,7)$. Então, considerando que o sistema de coordenadas é ortogonal e positivamente orientado,

$$(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 6 & -1 & 9\\ -12 & -3 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 9\\ -3 & 7\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}6 & 9\\ -12 & 7\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}6 & -1\\ -12 & -3\end{vmatrix}\vec{k}=(20,-150,-30). \qquad \square$$

(g) $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ e $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

Solução. Conforme já calculado no item (e), $\vec{u}+\vec{v}=(6,-1,9)$ e $\vec{v}-\vec{v}=(-12,-3,7)$. Então, como o sistema de coordenadas é ortogonal,

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|&=\sqrt{6^2+(-1)^2+9^2}=\sqrt{36+1+81}=\sqrt{118},\\ \|\vec{u}-\vec{v}\|&=\sqrt{(-12)^2+(-3)^2+7^2}=\sqrt{144+9+49}=\sqrt{202}.\end{aligned} \qquad \square$$

(h) $\|(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})\|$.

Solução. Conforme já calculado no item (f), $(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})=(20,-150,-30)$. Então:

$$\|(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})\|=\sqrt{20^2+(-150)^2+(-30)^2}=\sqrt{400+22500+900}=\sqrt{23800}=10\sqrt{238}.$$

Este cálculo de norma pressupõe que o sistema de coordenadas é ortogonal, condição que também foi assumida no cálculo de $(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})$. $\square$

(i) $\cos\operatorname{ang}(\vec{u}+\vec{v},\,\vec{u}-\vec{v})$.

Solução. Já vimos que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = -6$, $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{118}$ e $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{202}$. Então:

$$\cos\operatorname{ang}(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}) = \frac{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})}{\|\vec{u}+\vec{v}\|\|\vec{u}-\vec{v}\|} = \frac{-6}{\sqrt{118}\cdot\sqrt{202}} = \frac{-6}{2\sqrt{59}\sqrt{101}} = -\frac{3}{\sqrt{5959}}.$$ □

(j) $\operatorname{sen}\operatorname{ang}(\vec{u}+\vec{v},\ \vec{u}-\vec{v})$.

Solução. Já vimos que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{118}$, $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{202}$ e $\|(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})\| = 10\sqrt{238}$. Então

$$\operatorname{sen}\operatorname{ang}(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}) = \frac{\|(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})\|}{\|\vec{u}+\vec{v}\|\|\vec{u}-\vec{v}\|} = \frac{10\sqrt{238}}{\sqrt{118}\cdot\sqrt{202}} = \frac{10\sqrt{238}}{2\sqrt{59}\sqrt{101}} = \frac{5\sqrt{238}}{\sqrt{5959}}.$$ □

(k) $[-\vec{u},\vec{v}/2,\vec{u}+\vec{w}]$.

Solução. Relembre que $\vec{u} = (-3,-2,8)$, $\vec{v} = (9,1,1)$ e $\vec{w} = (2,-15,-3)$.

$$\begin{aligned}
\left[-\vec{u},\frac{\vec{v}}{2},\vec{u}+\vec{w}\right] &= \cancelto{0}{\left[-\vec{u},\frac{\vec{v}}{2},\vec{u}\right]} + \left[-\vec{u},\frac{\vec{v}}{2},\vec{w}\right] = (-1)\frac{1}{2}[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -\frac{1}{2}[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\\
&= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-3 & -2 & 8\\ 9 & 1 & 1\\ 2 & -15 & -3\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\left(-9\begin{vmatrix}-2 & 8\\ -15 & -3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-3 & 8\\ 2 & -3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-3 & -2\\ 2 & -15\end{vmatrix}\right)\\
&= -\frac{1}{2}(-9\cdot 126 - 7 - 49) = -\frac{1}{2}(-1190) = 595.
\end{aligned}$$ □

A utilização de determinante no cálculo de produto misto, como fizemos acima, se apoia o fato que o sistema de coordenadas é ortogonal e positivamente orientado. Não foi necessário aplicar módulo ao produto misto, porque os vetores dentro dele, na ordem em que foram escritos, formam uma base positiva. (Em outras palavras, o módulo não foi necessário porque o produto misto é positivo.)

(l) A área de um triângulo $[\![A,B,C]\!]$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Solução. Já vimos que $\vec{u}\wedge\vec{v} = (-10,75,15)$. Então:

$$\text{área}([\![A,B,C]\!]) = \frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-10)^2+75^2+15^2}}{2} = \frac{\sqrt{100+5625+225}}{2} = \frac{\sqrt{5950}}{2}.$$ □

O cálculo de norma mostrado acima pressupõe que o sistema de coordenadas é ortogonal, condição que também foi assumida no cálculo de $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

(m) A altura, com relação ao lado $[\![A,B]\!]$, do triângulo do item anterior.

Solução. Já sabemos que $\text{área}([\![A,B,C]\!]) = \sqrt{5950}/2$ e $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{u}\| = \sqrt{77}$. Então:

$$\text{alt}_{[\![A,B]\!]}([\![A,B,C]\!]) = \frac{2\cdot\text{área}([\![A,B,C]\!])}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{5950}}{\sqrt{77}} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{850}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{850}}{\sqrt{11}}.$$ □

(n) O volume de um tetraedro $[\![A,B,C,D]\!]$ tal que $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{u}-\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Solução. Temos: $\vec{u}+\vec{v} = (6,-1,9)$, $\vec{u}-\vec{v} = (-12,-3,7)$, $\vec{w} = (2,-15,-3)$. Então:

$$\begin{aligned}
\text{vol}([\![A,B,C,D]\!]) &= \frac{[\vec{u}+\vec{v},\ \vec{u}-\vec{v},\ \vec{w}]}{6} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix}6 & -1 & 9\\ -12 & -3 & 7\\ 2 & -15 & -3\end{vmatrix} = \frac{1}{6}\big(6(9+105)+1(36-14)+9(180+6)\big)\\
&= \frac{1}{6}(6\cdot 114 + 22 + 9\cdot 186) = \frac{1}{6}(684+22+1674) = \frac{2380}{6} = \frac{1190}{3}.
\end{aligned}$$ □

A utilização de determinante no cálculo de produto misto, como fizemos acima, se baseia no fato que o sistema de coordenadas é ortogonal e positivamente orientado. Não foi necessário aplicar módulo ao produto misto, porque ordenamos os vetores de modo concordante com as bases que orientam o espaço.

(o) A altura, com relação à face $[\![A,B,C]\!]$, do tetraedro do item anterior.

Solução. Já vimos que $\text{vol}([\![A,B,C,D]\!]) = 1190/3$ e $\|(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})\| = 10\sqrt{238}$. Então:

$$\begin{aligned}
\text{alt}_{[\![A,B,C]\!]}([\![A,B,C,D]\!]) &= \frac{6\cdot\text{vol}([\![A,B,C,D]\!])}{2\cdot\text{área}([\![A,B,C]\!])} = \frac{3\cdot\text{vol}([\![A,B,C,D]\!])}{\text{área}([\![A,B,C]\!])} = \frac{3\cdot 1190/3}{\|(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})\|/2}\\
&= \frac{1190}{10\sqrt{238}/2} = \frac{1190}{5\sqrt{238}} = \frac{238}{\sqrt{238}} = \sqrt{238}.
\end{aligned}$$

Obs.: O triângulo $[\![A,B,C]\!]$ deste item não é o mesmo do item (l). □

Questão 4 (peso 2,5)**.** Sejam $A = (-3,6,-10)$, $B = (-8,-5,-1)$, $C = (1,0,-6)$ pontos num sistema de coordenadas ortogonal, Σ.

(a) (peso 0,4) Dê um sistema de equações paramétricas para a reta $\langle A, B\rangle$.

Solução. $\overrightarrow{AB} = (-8+3, -5-6, -1+10) = (-5, -11, 9)$

- *Equação vetorial:* $(x, y, z) = (-3, 6, -10) + \lambda(-5, -11, 9)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
- *Equações paramétricas:* $\begin{cases} x = -3 - 5\lambda, \\ y = 6 - 11\lambda, \\ z = -10 + 9\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. □

(b) (peso 1,5) Dê equações nas formas vetorial, paramétrica e geral para o plano π que passa pelos pontos A, B, C.

Solução. Temos $\overrightarrow{AC} = (1+3, 0-6, -6+10) = (4, -6, 4)$ e, como já calculado no item anterior, $\overrightarrow{AB} = (-5, -11, 9)$.

- *Equação vetorial:* $X = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.
  Ou seja: $(x, y, z) = (-3, 6, -10) + \lambda(-5, -11, 9) + \mu(4, -6, 4)$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.
- *Equações paramétricas:* $\begin{cases} x = -3 - 5\lambda + 4\mu, \\ y = 6 - 11\lambda - 6\mu, \\ z = -10 + 9\lambda + 4\mu \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.
- *Equação geral:*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x+3 & y-6 & z+10 \\ -5 & -11 & 9 \\ 4 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+3)\begin{vmatrix} -11 & 9 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} - (y-6)\begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + (z+10)\begin{vmatrix} -5 & -11 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+3)(-44+54) - (y-6)(-20-36) + (z+10)(30+44) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 10(x+3) + 56(y-6) + 74(z+10) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 10x + 56y + 74z + 30 - 336 + 740 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 10x + 56y + 74z + 434 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 5x + 28y + 37z + 217 = 0.
\end{aligned}$$

Resposta: $5x + 28y + 37z + 217 = 0$. □

(c) (peso 0,4) Determine t para que o vetor $\vec{v} = (5+5t, 5t, 5+5t)$ seja paralelo ao plano π do item anterior.

Solução.

$$\begin{aligned}
\vec{v} \parallel \pi \quad &\Leftrightarrow \quad 5\cdot(5+5t) + 28\cdot 5t + 37\cdot(5+5t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 25 + 25t + 140t + 185 + 185t = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 210 + 350t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{210}{350} = -\frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

□

(d) (peso 0,2) Nos itens anteriores, em quais momentos você precisou usar a ortogonalidade do sistema de coordenadas Σ?

Solução. Em nenhum momento. Tudo que fizemos nesta questão independe de o sistema de coordenadas ser ou não ortogonal. □