UNIVASF – Geometria Analítica – Prof. João Alves – Lista 2.4 (v. 30/05/2025)
**Solução**

Todas as respostas devem ser justificadas com cálculos e/ou argumentos lógicos.

**Questão 1** (peso 0,8)**.** Há várias caracterizações equivalentes de bases, qualquer uma delas pode ser usada aqui. Vamos usar uma mais geométrica e fácil de entender.

(a) O que é um base de $\mathbb{V}^1$?

*Solução.* É uma lista unitária formada por um vetor não nulo em $\mathbb{V}^1$. □

(b) O que é um base de $\mathbb{V}^2$?

*Solução.* É um par ordenado formado por dois vetores não paralelos em $\mathbb{V}^2$. □

(c) O que é um base de $\mathbb{V}^3$?

*Solução.* É uma tripla ordenada formada por três vetores não coplanares em $\mathbb{V}^3$. □

**Questão 2** (peso 2,0)**.** Avalie se é possível escrever $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Se for possível, determine os coeficientes dessa combinação linear.

(a) $\vec{u} = (2,\ 1,\ 0)$, $\vec{v} = (1,\ 2,\ 2)$, $\vec{w} = (3,\ 0,\ 1)$.

*Solução.*

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3 = 2\lambda + \mu, \\ 0 = \lambda + 2\mu, \\ 1 = 2\mu \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3 = 2\lambda + 1/2, \\ 0 = \lambda + 1, \\ 1/2 = \mu \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5/2 = 2\lambda, \\ -1 = \lambda, \\ 1/2 = \mu \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5/4 = \lambda, \\ -1 = \lambda, \\ 1/2 = \mu. \end{cases}$$

Sistema impossível. Então $\vec{w}$ não é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. □

(b) $\vec{u} = (3,\ -4,\ -2)$, $\vec{v} = (3,\ -1,\ -4)$, $\vec{w} = (-6,\ 5,\ 6)$.

*Solução.*

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -6 = 3\lambda + 3\mu, \\ 5 = -4\lambda - \mu, \\ 6 = -2\lambda - 4\mu \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -6 = 3\lambda + 3(-4\lambda - 5), \\ \mu = -4\lambda - 5, \\ 6 = -2\lambda - 4(-4\lambda - 5) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -6 = -9\lambda - 15, \\ \mu = -4\lambda - 5, \\ 6 = 14\lambda + 20 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -6 = -9\lambda - 15, \\ \mu = -4\lambda - 5 \\ 6 = 14\lambda + 20 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 9/(-9) = -1, \\ \mu = -4\lambda - 5 \\ \lambda = (-14)/14 = -1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = -1, \\ \mu = -1. \end{cases}$$

Sistema possível e determinado: $\vec{w} = (-1)\vec{u} + (-1)\vec{v}$, e esta a única maneira de escrever $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. □

**Questão 3** (peso 4,2)**.** Considere os vetores $\vec{u} = (1,\ -3,\ 4)$, $\vec{v} = (-5,\ 4,\ -3)$, $\vec{w} = (-3,\ 5,\ -2)$ num sistema de coordenadas ortogonal com orientação positiva. Calcule:

(a) $\|\vec{u}\|$.

*Solução.* $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 9 + 16} = \sqrt{26}$. □

(b) $\|\vec{v}\|$.

*Solução.* $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 16 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. □

(c) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

*Solução.* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-5) + (-3) \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = -5 - 12 - 12 = -29$. □

(d) $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

*Solução.*

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \frac{-29}{26}(1,\ -3,\ 4) = \left(\frac{-29}{26}, \frac{87}{26}, \frac{-116}{26}\right) = \left(-\frac{29}{26}, \frac{87}{26}, -\frac{58}{13}\right).$$ □

(e) $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

*Solução.*

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 4\\ -5 & 4 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 4 & -3\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}1 & 4\\ -5 & -3\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}1 & -3\\ -5 & 4\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=(9-16)\vec{\imath}-(-3+20)\vec{\jmath}+(4-15)\vec{k}=-7\vec{\imath}-17\vec{\jmath}-11\vec{k}=(-7,\,-17,\,-11).\qquad\square$$

(f) $\cos\operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v})$.

*Solução.* Como $\|\vec{u}\|=\sqrt{26}$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{50}$ e $\vec{u}\cdot\vec{v}=-29$, temos

$$\cos\operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{-29}{\sqrt{26}\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{-29}{5\sqrt{52}}=-\frac{29}{10\sqrt{13}}.\qquad\square$$

(g) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

*Solução.*

$$[\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w}]=(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}=(-7,\,-17,\,-11)\cdot(-3,\,5,\,-2)$$
$$=(-7)\cdot(-3)+(-17)\cdot 5+(-11)\cdot(-2)=21-85+22=-42.\qquad\square$$

(h) $[\vec{u},\vec{v}-\vec{w},2\vec{w}]$.

*Solução.* Temos $\vec{u}=(1,-3,4)$, $\vec{v}-\vec{w}=(-2,-1,-1)$ e $2\vec{w}=(-6,10,-4)$. Fazendo expansão de Laplace na 1ª linha:

$$[\vec{u},\vec{v}-\vec{w},2\vec{w}]=\begin{vmatrix}1 & -3 & 4\\ -2 & -1 & -1\\ -6 & 10 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 10 & -4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -6 & -4\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -6 & 10\end{vmatrix}$$
$$=4+10+3(8-6)+4(-20-6)$$
$$=14+3\cdot 2+4\cdot(-26)$$
$$=14+6-104$$
$$=-84.\qquad\square$$

(i) A área de um paralelogramo $[\![A,B,C,D]\!]$ tal que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

*Solução.* A área de tal paralelogramo deve ser

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|(-7,\,-17,\,-11)\|=\sqrt{(-7)^2+(-17)^2+(-11)^2}$$
$$=\sqrt{49+289+121}=\sqrt{459}=\sqrt{9\cdot 51}=3\sqrt{51}.\qquad\square$$

(j) O volume de um tetraedro $[\![A,B,C,D]\!]$ tal que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$.

*Solução.* O volume de tal tetraedro deve ser $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|/6=|-42|/6=42/6=7$. $\square$

Responda:

(k) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos?

*Solução.* Não, pois $\vec{u}\wedge\vec{v}=(-7,\,-17,\,-11)\neq\vec{0}$. $\square$

(l) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ são coplanares?

*Solução.* Não, pois $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-42\neq 0$. $\square$

(m) $\vec{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

*Solução.* Não, pois $(\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w})$ é LI (já que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ não são coplanares, como já dissemos no item anterior). $\square$

**Questão 4** (peso 1,0)**.** Escreva um sistema de equações paramétricas para a reta $r$ que passa pelo ponto $A=(-8,\,2,\,2)$ na direção do vetor $\vec{u}=(0,\,-4,\,-2)$. Esta reta tem equações na forma simétrica? Se sim, mostre-as.

*Solução.* De imediato, temos que um sistema de equações paramétricas para $r$ é

$$\begin{cases}x=-8,\\ y=2-4\lambda, \quad (\lambda\in\mathbb{R}).\\ z=2-2\lambda\end{cases}$$

Esta reta não tem equações na forma simétrica, pois uma das coordenadas do vetor diretor $\vec{u}$ é nula. $\square$

**Questão 5** (peso 2,0)**.** Seja $\pi$ o plano que passa pelos pontos $A=(5,\,-8,\,2)$, $B=(-9,\,4,\,6)$ e $C=(3,\,-7,\,-1)$.

(a) (peso 1,5) Dê equações nas formas vetorial, paramétrica e geral para o plano $\pi$.

*Solução.*

- *Vetorial*: $X = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$. Em coordenadas:

$$(x, y, z) = (5, -8, 2) + \lambda(-14, 12, 4) + \mu(-2, 1, -3) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

(Há várias outras respostas certas.)

- *Paramétricas*:

$$\begin{cases} x = 5 - 14\lambda - 2\mu, \\ y = -8 + 12\lambda + \mu, \\ z = 2 + 4\lambda - 3\mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

(Há várias outras respostas certas.)

- *Geral*: Por expansão de Laplace na 1ª linha:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y+8 & z-2 \\ -14 & 12 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (x-5)\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (y+8)\begin{vmatrix} -14 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -14 & 12 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-5)(-36-4) - (y+8)(42+8) + (z-2)(-14+24) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -40(x-5) - 50(y+8) + 10(z-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -4(x-5) - 5(y+8) + (z-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -4x - 5y + z + 20 - 40 - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x + 5y - z + 22 = 0.
\end{aligned}$$

□

Uma equação geral para o plano $\pi$ é $4x + 5y - z + 22 = 0$. (Outras equações gerais do plano $\pi$ são obtidas a partir desta multiplicando-se ambos os membros por uma mesma constante não nula.)

(b) (peso 0,5) Verifique se o vetor $(-3, 3, 3)$ é paralelo ao plano $\pi$.

*Solução.* Um vetor $\vec{u} = (m, n, p)$ é paralelo ao plano $\pi : ax+by+cz+d = 0$ se e somente se $am+bn+cp = 0$. Para $a = 4$, $b = 5$, $c = -1$, $m = -3$, $n = 3$, $p = 3$, temos

$$am + bn + cp = 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 = -12 + 15 - 3 = 0.$$

Portanto, o vetor $(-3, 3, 3)$ é paralelo ao plano $\pi : 4x + 5y - z + 22 = 0$. □