UNIVASF – Geometria Analítica – Prof. João Alves – Lista 2.3 (v. 27/05/2025)

Solução

Todas as respostas devem ser justificadas com cálculos e/ou argumentos lógicos.

Questão 1 (peso 2,8)**.** Na Figura 1:

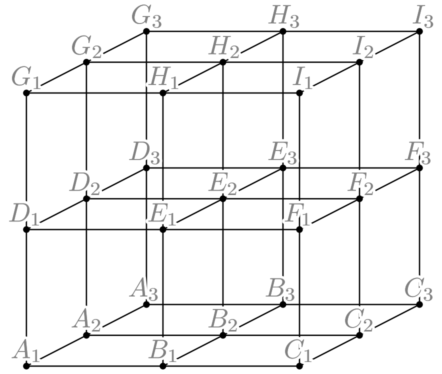

FIGURA 1. Oito cubos de lado ℓ, unidos pelas faces, formando um cubo de lado 2ℓ.

(a) (peso 0,5) Dê exemplo de três pontos que pertencem ao plano $\pi : X = G_2 + \lambda\overrightarrow{H_2H_3} + \mu\overrightarrow{F_1H_1}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Solução. A equação vetorial do plano π nos diz que ele passa pelo ponto G_2 e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{H_2H_3}$ e $\overrightarrow{F_1H_1}$. Então ele passa pelos pontos G_1, G_2, G_3, E_1, E_2, E_3, C_1, C_2, C_3. (Quaisquer três pontos destes serve como resposta.) $\square$

(b) (peso 0,6) Defina, por meio de equações vetoriais, duas retas, r_1 e r_2, que passam pelo ponto D_2 e são paralelas ao plano π do item (a), mas não são paralelas entre si.

Solução. $r_1 : D_2 + \lambda\overrightarrow{D_2B_2}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $r_2 : D_2 + \lambda\overrightarrow{D_2D_1}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. *Extra:* $r_3 : D_2 + \lambda\overrightarrow{D_2B_1}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. (Algumas variantes destas equações também podem ser dadas como resposta.) $\square$

(c) (peso 0,4) Dê uma equação vetorial para o plano π' que passa pelo ponto I_1 e é paralelo ao plano π do item (a).

Solução. $X = I_1 + \lambda\overrightarrow{H_2H_3} + \mu\overrightarrow{F_1H_1}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$. (Há várias outras respostas certas.) $\square$

(d) (peso 0,5) O vetor $\overrightarrow{E_3I_3}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{E_2B_1}$ e $\overrightarrow{E_2C_2}$? Se sim, indique a combinação linear.

Solução. Não, pois $\overrightarrow{E_3I_3}$, $\overrightarrow{E_2B_1}$ e $\overrightarrow{E_2C_2}$ não são coplanares. $\square$

(e) (peso 0,4) Existe a medida angular entre $\overrightarrow{E_2H_1}$ e $\overrightarrow{I_3C_3}$? Se sim, determine-a.

Solução. Sim, $\operatorname{ang}(\overrightarrow{E_2H_1}, \overrightarrow{I_3C_3}) = \operatorname{ang}(\overrightarrow{E_2H_1}, \overrightarrow{E_2B_2}) = 3\pi/4$. $\square$

(f) (peso 0,4) Está bem definida a projeção ortogonal de $\overrightarrow{E_2I_3}$ sobre $\overrightarrow{G_1G_1}$? Se sim, determine-a.

Solução. Não, pois $\overrightarrow{G_1G_1} = \vec{0}$ e não definimos projeção ortogonal sobre o vetor nulo. (Inclusive, a fórmula $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{v}/\|\vec{v}\|^2)\vec{v}$ não pode ser usada no caso $\vec{v} = \vec{0}$, porque o denominador se anula.) $\square$

Questão 2 (peso 4,2, uniformemente distribuído entre os itens)**.** Considere os vetores $\vec{u} = (3, -4, -2)$, $\vec{v} = (3, -1, -4)$, $\vec{w} = (-6, 5, 6)$ num sistema de coordenadas ortogonal com orientação positiva. Calcule:

(a) $\|\vec{u}\|$.

Solução. $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$. $\square$

(b) $\|\vec{v}\|$.

Solução. $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26}$. $\square$

(c) $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Solução. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\cdot 3 + (-4)(-1) + (-2)(-4) = 9 + 4 + 8 = 21$. $\square$

(d) $\operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

Solução.

$$\operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \frac{21}{29}(3, -4, -2) = \left(\frac{21\cdot 3}{29}, -\frac{21\cdot 4}{29}, -\frac{21\cdot 2}{29}\right) = \left(\frac{63}{29}, -\frac{84}{29}, -\frac{42}{29}\right). \quad \square$$

(e) $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

Solução.

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (16 - 2)\vec{\imath} - (-12 + 6)\vec{\jmath} + (-3 + 12)\vec{k} = 14\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 9\vec{k} = (14, 6, 9). \quad \square$$

(f) $\operatorname{sen}\operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v})$.

Solução. Como $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \sqrt{14^2+6^2+9^2} = \sqrt{196+36+81} = \sqrt{313}$, temos

$$\operatorname{sen}\operatorname{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{313}}{\sqrt{29}\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{313}}{\sqrt{754}} = \sqrt{\frac{313}{754}}. \qquad \square$$

(g) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

Solução.

$$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}] = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} = (14,\ 6,\ 9)\cdot(-6,\ 5,\ 6) = 14\cdot(-6)+6\cdot 5+9\cdot 6 = -84+30+54 = 0. \qquad \square$$

(h) $[2(\vec{u}-\vec{v}), 2(\vec{v}-\vec{w}), 2(\vec{w}+\vec{u})]$.

Solução. De acordo com o Exercício Resolvido 12-16 de [1],

$$[2(\vec{u}-\vec{v}), 2(\vec{v}-\vec{w}), 2(\vec{w}+\vec{u})] = [2\vec{u}-2\vec{v}, 2\vec{v}-2\vec{w}, 2\vec{w}+2\vec{u}] = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} [\vec{u},\vec{v},\vec{w}].$$

Daí, por $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$ (conclusão do item anterior), segue que $[2(\vec{u}-\vec{v}), 2(\vec{v}-\vec{w}), 2(\vec{w}+\vec{u})] = 0$. $\square$

(i) A área de um paralelogramo $[\![A,B,C,D]\!]$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Solução. A área de tal paralelogramo deve ser $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \sqrt{313}$. $\square$

(j) O volume de um tetraedro $[\![A,B,C,D]\!]$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Solução. O volume de tal tetraedro deve ser $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|/6 = 0/6 = 0$. (O tetraedro é degenerado.) $\square$

Responda:

(k) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos?

Solução. Não, pois $\vec{u}\wedge\vec{v} = (14,\ 6,\ 9) \neq \vec{0}$. $\square$

(l) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ são coplanares?

Solução. Sim, pois $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$. $\square$

(m) $\vec{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

Solução. Sim, pois $(\vec{u},\ \vec{v})$ é LI e $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ é LD. $\square$

Questão 3 (peso 1,0)**.** Escreva um sistema de equações paramétricas para a reta r que passa pelos pontos $A = (-1,\ 2,\ 5)$ e $B = (-2,\ 5,\ -3)$. Esta reta tem equações na forma simétrica? Se sim, mostre-as.

Solução. A reta r tem vetor diretor $\overrightarrow{AB} = (-2-(-1),\ 5-2,\ -3-5) = (-1,\ 3,\ -8)$ e passa pelo ponto $A = (-1,\ 2,\ 5)$, então tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -1-\lambda, \\ y = 2+3\lambda, \\ z = 5-8\lambda. \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R}).$$

Ela também tem equações simétricas, que podem ser obtidas eliminando o λ das equações paramétricas:

$$r : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{x-5}{-8}.$$

(Há várias outras equações na forma paramétrica e na forma simétrica para a reta r.) $\square$

Questão 4 (peso 2,0)**.** Seja π o plano que passa pelos pontos $A = (9,\ 3,\ 0)$, $B = (-2,\ 0,\ -8)$ e $C = (-7,\ -3,\ 0)$.

(a) (peso 1,5) Dê equações nas formas vetorial, paramétrica e geral para o plano π.

Solução.

- *Vetorial*: $X = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$. Em coordenadas:

$$(x,y,z) = (9,\ 3,\ 0) + \lambda(-11,\ -3,\ -8) + \mu(-16,\ -6,\ 0) \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R}).$$

  (Há várias outras respostas certas.)

- *Paramétricas*:

$$\begin{cases} x = 9-11\lambda-16\mu, \\ y = 3-3\lambda-6\mu, \\ z = -8\lambda. \end{cases} \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$$

  (Há várias outras respostas certas.)

- *Geral*: Por expansão de Laplace na 3ª linha:

$$\begin{vmatrix} x-9 & y-3 & z \\ -11 & -3 & -8 \\ -16 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -16\begin{vmatrix} y-3 & z \\ -3 & -8 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} x-9 & z \\ -11 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad -16(-8y+24+3z)+6(-8x+72+11z)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad 128y-384-48z-48x+432+66z=0 \\ &\Leftrightarrow \quad -48x+128y-18z+48=0 \\ &\Leftrightarrow \quad 24x-64y-9z-24=0. \end{aligned}$$

□

Uma equação geral para o plano π é $24x - 64y - 9z - 24 = 0$. (Outras equações gerais do plano π são obtidas a partir desta multiplicando-se ambos os membros por uma mesma constante não nula.)

(b) (peso 0,5) Verifique se o vetor (3, 9, 10) é paralelo ao plano π.

Solução. Um vetor $\vec{u} = (m,\, n,\, p)$ é paralelo ao plano $\pi : ax+by+cz+d = 0$ se e somente se $am+bn+cp = 0$. Para $a = 24$, $b = -64$, $c = -9$, $m = 3$, $n = 9$, $p = 10$, temos

$$am + bn + cp = 24 \cdot 3 + (-64) \cdot 9 + (-9) \cdot 10 = 72 - 576 - 90 = -594 \neq 0.$$

Logo, o vetor (3, 9, 10) não é paralelo ao plano $\pi : 24x - 64y - 9z - 24 = 0$. □

Referências

[1] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria Analítica: um Tratamento Vetorial. 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005. ISBN 85-87918-91-5.

UNIVASF, Colegiado de Eng. de Produção | E-mail: joao.alvesj@univasf.edu.br