UNIVASF – Geometria Analítica – Prof. João Alves – Lista 2.2 (v. 30/05/2025)
Solução

Todas as respostas devem ser justificadas com cálculos e/ou argumentos lógicos.

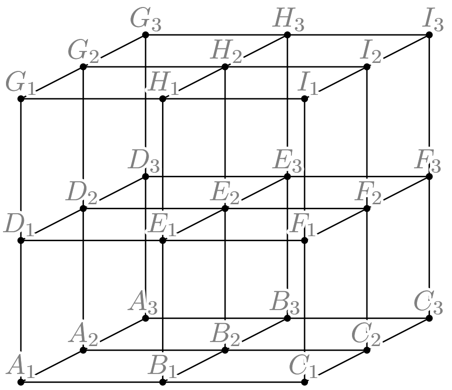

FIGURA 1. Oito cubos de lado ℓ, unidos pelas faces, formando um cubo de lado 2ℓ.

Questão 1 (peso 2,8)**.** Na Figura 1:

(a) (peso 0,6) Dê exemplo de dois vetores que são paralelos entre si e dois outros vetores que não são paralelos entre si.

Solução. $\overrightarrow{E_1E_2}$ e $\overrightarrow{I_3I_1}$ são paralelos; $\overrightarrow{C_1E_2}$ e $\overrightarrow{B_1D_3}$ não são paralelos. (Há várias outras respostas certas.) □

(b) (peso 0,6) Dê exemplo de três vetores que são coplanares entre si e três outros vetores que não são coplanares entre si.

Solução. $\overrightarrow{E_1D_2}$, $\overrightarrow{F_1D_3}$ e $\overrightarrow{H_2I_3}$ são coplanares; $\overrightarrow{D_3I_3}$, $\overrightarrow{C_3F_3}$ e $\overrightarrow{E_1C_2}$ não são coplanares. (Há várias outras respostas certas.) □

(c) (peso 0,8) O vetor $\overrightarrow{D_3E_1}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{G_2G_3}$ e $\overrightarrow{A_3B_2}$? Se sim, mostre a combinação linear.

Solução. Sim, pois $(\overrightarrow{G_2G_3}, \overrightarrow{A_3B_2})$ é LI e $(\overrightarrow{G_2G_3}, \overrightarrow{A_3B_2}, \overrightarrow{D_3E_1})$ é LD. A combinação linear é

$$\overrightarrow{D_3E_1} = 1\overrightarrow{A_3B_2} + (-1)\overrightarrow{G_2G_3},$$

pois $\overrightarrow{D_3E_1} = \overrightarrow{D_2E_1} - \overrightarrow{D_2D_3} = \overrightarrow{A_3B_2} - \overrightarrow{G_2G_3}$. □

(d) (peso 0,4) Está bem definida a medida angular entre $\overrightarrow{E_2H_3}$ e $\overrightarrow{A_1B_2}$? Se sim, determine-a.

Solução. Sim, pois os vetores são não nulos. Observe que $\overrightarrow{A_1B_2} = \overrightarrow{E_2F_3}$ e o triângulo $E_2F_3H_3$ é equilátero. Então $\text{ang}(\overrightarrow{E_2H_3}, \overrightarrow{A_1B_2}) = \text{ang}(\overrightarrow{E_2H_3}, \overrightarrow{E_2F_3}) = \pi/3$. □

(e) (peso 0,4) Existe a projeção ortogonal de $\overrightarrow{E_2I_3}$ sobre $\overrightarrow{H_2G_1}$? Se sim, determine-a.

Solução. Sim, pois $\overrightarrow{H_2G_1} \neq \vec{0}$. A projeção ortogonal de $\overrightarrow{E_2I_3}$ sobre $\overrightarrow{H_2G_1}$ é definida como o único vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{w} \parallel \overrightarrow{H_2G_1}$ e $(\overrightarrow{E_2I_3} - \vec{w}) \perp \overrightarrow{H_2G_1}$. Na Figura 1, vemos que o vetor $\vec{w} = \overrightarrow{E_2F_3}$ satisfaz estas condições (em particular, note que $\overrightarrow{E_2I_3} - \overrightarrow{E_2F_3} = \overrightarrow{F_3I_3} \perp \overrightarrow{F_3E_2} = \overrightarrow{H_2G_1}$). Portanto, $\text{proj}_{\overrightarrow{H_2G_1}}\overrightarrow{E_2I_3} = \overrightarrow{E_2F_3}$. □

Questão 2 (peso 4,2, uniformemente distribuído entre os itens)**.** Considere os vetores $\vec{u} = (-4,\ -1,\ 9)$, $\vec{v} = (8,\ 0,\ 2)$, $\vec{w} = (6,\ 5,\ -4)$ num sistema de coordenadas ortogonal com orientação positiva. Calcule:

(a) $\|\vec{u}\|$.

Solução. $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{16 + 1 + 81} = \sqrt{98}$. □

(b) $\|\vec{v}\|$.

Solução. $\|\vec{v}\| = \sqrt{8^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{64 + 0 + 4} = \sqrt{68}$. □

(c) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solução. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-4) \cdot 8 + (-1) \cdot 0 + 9 \cdot 2 = -32 + 0 + 18 = -14$. □

(d) $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.

Solução.

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{-14}{68}(8,\ 0,\ 2) = -\frac{7}{34}(8,\ 0,\ 2) = \left(\frac{(-7) \cdot 8}{34},\ 0,\ \frac{(-7) \cdot 2}{34}\right) = \left(-\frac{28}{17},\ 0,\ -\frac{7}{17}\right).$$ □

(e) $\cos \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$.

Solução.

$$\begin{aligned}\cos \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{-14}{\sqrt{98}\sqrt{68}} = -\frac{14}{\sqrt{49 \cdot 2}\sqrt{4 \cdot 17}} \\ &= -\frac{14}{(7\sqrt{2})(2\sqrt{17})} = -\frac{\cancel{14}}{\cancel{(7 \cdot 2)}\sqrt{2 \cdot 17}} = -\frac{1}{\sqrt{34}} = -\frac{\sqrt{34}}{34}.\end{aligned}$$ □

(f) $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Solução. Por expansão de Laplace na 3ª linha:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -4 & -1 & 9 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 9 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 8(9\vec{\jmath} + \vec{k}) + 2(-\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})$$
$$= 72\vec{\jmath} + 8\vec{k} - 2\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} = -2\vec{\imath} + 80\vec{\jmath} + 8\vec{k} = (-2,\, 80,\, 8).$$ □

(g) $[\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w}]$.

Solução.

$$[\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (-2,\, 80,\, 8) \cdot (6,\, 5,\, -4) = (-2) \cdot 6 + 80 \cdot 5 + 8 \cdot (-4) = -12 + 400 - 32 = 356.$$ □

(h) $[\vec{u},\, \vec{v}/2,\, \vec{u} + \vec{w}]$.

Solução.

$$\left[\vec{u},\, \frac{\vec{v}}{2},\, \vec{u} + \vec{w}\right] = \left[\vec{u},\, \frac{\vec{v}}{2},\, \vec{u}\right] + \left[\vec{u},\, \frac{\vec{v}}{2},\, \vec{w}\right] = \frac{1}{2}\underbrace{[\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{u}]}_{=0} + \frac{1}{2}[\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w}] = \frac{1}{2}[\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w}] = \frac{1}{2} \cdot 356 = 178.$$ □

(i) A área de um triângulo $[\![A, B, C]\!]$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Solução. A área de tal triângulo deve ser metade da norma do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$. Como $\vec{u} \times \vec{v} = (-2,\, 80,\, 8)$, temos que

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 80^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 6400 + 64} = \sqrt{6468} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11} = 2 \cdot 7\sqrt{3 \cdot 11} = 14\sqrt{33}$$

e, portanto, a área do triângulo ABC é $\frac{14\sqrt{33}}{2} = 7\sqrt{33}$. □

(j) A altura, com relação ao lado $[\![A, B]\!]$ do triângulo do item anterior.

Solução. Se, no triângulo ABC, h é a altura com relação ao lado AB e S é a área, então $S = \|\overrightarrow{AB}\|h/2 \;\therefore\; h = 2S/\|\overrightarrow{AB}\|$. Como $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{u}\| = \sqrt{98}$ e $S = 7\sqrt{33}$, segue que

$$h = \frac{2 \cdot 7\sqrt{33}}{\sqrt{98}} = 14\sqrt{\frac{33}{98}}.$$ □

Responda:

(k) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos?

Solução. Não, pois $\vec{u} \times \vec{v} = (-2,\, 80,\, 8) \neq \vec{0}$. □

(l) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ são coplanares?

Solução. Não, pois $[\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w}] = 356 \neq 0$. □

(m) $\vec{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

Solução. Não, pois $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ não são coplanares. □

Questão 3 (peso 1,0)**.** Escreva um sistema de equações paramétricas para a reta r que passa pelos pontos $A = (6,\, -5,\, 8)$ e $B = (-3,\, -5,\, -4)$. Esta reta tem equações na forma simétrica? Se sim, mostre-as.

Solução. Um vetor diretor para r é $\overrightarrow{AB} = (-3 - 6,\, -5 - (-5),\, -4 - 8) = (-9,\, 0,\, -12)$. E r passa por $A = (6,\, -5,\, 8)$. Então $r : \begin{cases} x = 6 - 9\lambda, \\ y = -5, \\ z = 8 - 12\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. (Há vários outros sistemas de equações na forma paramétrica para r.) A reta r não possui equações na forma simétrica, pois os vetores diretores de r têm todos uma coordenada nula. (Um desses vetores diretores é $\overrightarrow{AB} = (-9,\, 0,\, -12)$, os outros são múltiplos deste por um escalar não nulo.) □

Questão 4 (peso 2,0)**.** Seja π o plano que passa pelos pontos $A = (-2,\, 7,\, -9)$, $B = (-7,\, -4,\, -2)$ e $C = (0,\, 1,\, -5)$.

(a) (peso 1,5) Dê equações nas formas vetorial, paramétrica e geral para o plano π.

Solução.

- *Vetorial*: $X = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$. Em coordenadas:

  $$(x, y, z) = (-2,\, 7,\, -9) + \lambda(-5,\, -11,\, 7) + \mu(2,\, -6,\, 4), \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

  (Há várias outras respostas certas.)

- *Paramétricas*:

$$\begin{cases} x = -2 - 5\lambda + 2\mu, \\ y = 7 - 11\lambda - 6\mu, \\ z = -9 + 7\lambda + 4\mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

(Há várias outras respostas certas.)

- *Geral*:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x+2 & y-7 & z+9 \\ -5 & -11 & 7 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+2)\begin{vmatrix} -11 & 7 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} - (y-7)\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (z+9)\begin{vmatrix} -5 & -11 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+2)(-44+42) - (y-7)(-20-14) + (z+9)(30+22) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2(x+2) + 34(y-7) + 52(z+9) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2x + 34y + 52z - 4 - 238 + 468 \\
&\Leftrightarrow \quad -2x + 34y + 52z + 226 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x - 17y - 26z - 113 = 0.
\end{aligned}$$

Uma equação geral para o plano π é $x - 17y - 26z - 113 = 0$. (Outras equações gerais do plano π são obtidas a partir desta multiplicando-se ambos os membros por uma mesma constante não nula.) □

(b) (peso 0,5) Verifique se o vetor $(-19,\ -21,\ 13)$ é paralelo ao plano π.

Solução. Um vetor $\vec{u} = (m,\ n,\ p)$ é paralelo ao plano $\pi : ax+by+cz+d = 0$ se e somente se $am+bn+cp = 0$. Para $a = 1$, $b = -17$, $c = -26$, $m = -19$, $n = -21$, $p = 13$, temos

$$am + bn + cp = 1 \cdot (-19) + (-17) \cdot (-21) + (-26) \cdot 13 = -19 + 357 - 338 = 0.$$

Logo, o vetor $(-19,\ -21,\ 13)$ é paralelo ao plano $\pi : x - 17y - 26z - 113 = 0$. □