UNIVASF – Geometria Analítica – Prof. João Alves – Lista 3.1 (v. 02/06/2025)

Solução

Verdadeiro ou Falso

Nas duas próximas questões, cada item dá uma proposição, que você deve avaliar como verdadeira (V) ou falsa (F), podendo deixar em branco se não tiver certeza. Se você responder V ou F e errar, receberá pontuação negativa pelo item. Se o saldo das pontuações recebidas numa mesma questão for negativo, este saldo será zerado. Pontuações negativas recebidas numa questão não afetam outras questões.

Questão 1. Nesta questão, considere o universo geométrico restrito a um plano π.

(a) (F) Com relação a qualquer sistema ortogonal de coordenadas, toda elipse tem equação da forma $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, com $a > b > 0$.

(b) (V) Toda hipérbole tem equação da forma $-x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, com $a, b > 0$, em relação a algum sistema ortogonal de coordenadas.

(c) (F) Toda circunferência é também uma elipse.

(d) (F) Se π é um plano, r é uma reta contida em π e $\mathbf{P}$ é uma parábola contida em π, então, necessariamente, $r \cap \mathbf{P} = \varnothing$ se e somente se r é paralela à reta diretriz de $\mathbf{P}$.

(e) (F) Com relação a um sistema ortogonal de coordenadas Oxy, a elipse de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, com $a > b > 0$, tem distância focal $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

(f) (F) Com relação a um sistema ortogonal de coordenadas Oxy, a hipérbole de equação $-x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, com $a, b > 0$, tem eixo transverso contido no eixo x e eixo conjugado contido no eixo y.

(g) (F) Com relação a um sistema ortogonal de coordenadas Oxy, a equação $x^2 - y^2 = 0$ define uma hipérbole de distância focal zero.

(h) (V) Chamamos de vértice o ponto de uma parábola que intersecta o seu eixo.

(i) (V) Com relação a um sistema ortogonal de coordenadas Oxy, a coroa fundamental da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, com $a > b > 0$, tem raio menor b e raio maior a.

(j) (V) Se $\mathbf{P}$ é uma parábola de foco F, vértice V e reta diretriz $r : X = A + \lambda\overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), com $A, B \in r$, $A \neq B$, então, para cada ponto $P \in \mathbf{P}$, vale a igualdade $\|\overrightarrow{PF}\| = \|\overrightarrow{AP} - \mathrm{Proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}\|$.

Questão 2. É correto afirmar que:

(a) (F) Com relação a qualquer sistema ortogonal de coordenadas Oxy, toda parábola tem equação da forma $x^2 = 4py$, com $p > 0$.

(b) (F) Numa hipérbole, o eixo transverso é necessariamente maior do que o eixo conjugado.

(c) (V) Se $\mathbf{H}$ é uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo conjugado medindo k, então, necessariamente, para cada ponto $P \in \mathbf{H}$, vale a igualdade $\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\| = k$.

(d) (F) Se π é um plano, r é uma reta contida em π e $\mathbf{H}$ é uma hipérbole contida em π, então, necessariamente, $r \cap \mathbf{H} = \varnothing$ se e somente se r é uma assíntota de $\mathbf{H}$.

(e) (V) Com relação a um sistema ortogonal de coordenadas Oxy, qualquer equação da forma $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1$, com $a > b > 0$ e $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, constantes, descreve uma elipse com centro no ponto (x_0, y_0).

(f) (F) Com relação a um sistema ortogonal de coordenadas Oxy, a parábola de equação $y^2 = 4px$, com $p > 0$, tem foco na parte positiva do eixo y.

(g) (F) Com relação a um sistema ortogonal de coordenadas Oxy, se $a > b > 0$, então os vértices da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ são os pontos $(0, -a)$, $(0, a)$, $(-b, 0)$, $(b, 0)$.

(h) (V) Se $\mathbf{E}$ é uma elipse com focos F_1 e F_2 e eixo maior medindo k, então, necessariamente, para cada ponto $P \in \mathbf{E}$, vale a igualdade $\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = k$.

(i) (V) Dados sistemas ortogonais de coordenadas $\Sigma_1 = O[A, B]$ e $\Sigma_2 = O[B, C]$, com $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$, e constantes $a > b > 0$, se uma elipse $\mathbf{E}$ tem equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ com relação a Σ_1, então, necessariamente, $\mathbf{E}$ tem equação $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$ com relação a Σ_2.

(j) (V) Dados sistemas ortogonais de coordenadas $\Sigma_1 = O[A, B]$ e $\Sigma_2 = O[B, C]$, com $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$, e uma constante $p > 0$, se uma parábola $\mathbf{P}$ tem equação $x^2 = 4py$ com relação a Σ_1, então, necessariamente, $\mathbf{P}$ tem equação $y^2 = 4px$ com relação a Σ_2.

Múltipla Escolha

Cada questão a seguir tem cinco alternativas, das quais apenas uma responde corretamente a questão. Você deve selecionar a alternativa correta, ou deixar a questão em branco, se não tiver certeza. Se você marcar uma alternativa e errar, receberá uma pontuação negativa pela questão, equivalente, em módulo, a $1/4$ do valor da questão; se você deixar a questão em branco, receberá zero pela questão. Se o saldo de pontuação nesta seção for negativo, este será zerado.

Questão 3. Dados pontos F_1, F_2, num plano π, com $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c > 0$, e um número $a > 0$, a condição que define, em π, uma elipse com focos F_1, F_2 e semieixo maior medindo a é

(a) $\text{dist}(F_1, X) + \text{dist}(F_2, X) = a$.

(b) $\text{dist}(F_1, X) + \text{dist}(F_2, X) = 2a$.

(c) $\text{dist}(F_1, X) + \text{dist}(F_2, X) = c$.

(d) $\text{dist}(F_1, X) + \text{dist}(F_2, X) = 2c$.

(e) $\text{dist}(F_1, X) + \text{dist}(F_2, X) = 2\sqrt{a^2 - c^2}$.

Resposta. (b). □

Questão 4. Dados pontos F_1, F_2, num plano π, com $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c > 0$, e um número $a > 0$, a condição que define, em π, uma hipérbole com focos F_1, F_2 e semieixo conjugado medindo a é

(a) $\text{dist}(F_1, X) + \text{dist}(F_2, X) = 2a$.

(b) $\text{dist}(F_1, X) - \text{dist}(F_2, X) = 2a$.

(c) $\text{dist}(F_2, X) - \text{dist}(F_1, X) = 2a$.

(d) $|\text{dist}(F_1, X) - \text{dist}(F_2, X)| = 2a$.

(e) $|\text{dist}(F_1, X) - \text{dist}(F_2, X)| = 2\sqrt{c^2 - a^2}$.

Resposta. (e). □

Questão 5. Uma parábola de foco F e diretriz r é definida como o lugar geométrico dos pontos X tais que:

(a) a distância de X a F somada com a distância de X a r é constante.

(b) o módulo da diferença entre as distâncias de X a F e de X a r é constante.

(c) a distância de X a F é sempre igual à distância de X a r.

(d) o quadrado da distância de X a F é sempre igual à distância de X a r.

(e) o quadrado da distância de X a r é sempre igual à distância de X a F.

Resposta. (c). □

Questão 6. Numa parábola, a diretriz é:

(a) a corda que passa pelo foco perpendicularmente ao eixo.

(b) o segmento de reta que liga o vértice ao foco.

(c) a distância do foco ao vértice.

(d) uma reta perpendicular ao eixo, que não intersecta a parábola.

(e) uma reta perpendicular ao eixo, que intersecta a parábola no vértice.

Resposta. (d). □

Questão 7. Seja $\mathbf{H}$ uma hipérbole arbitrária.

(a) Se a é a medida do semieixo transverso de $\mathbf{H}$ e b é a medida do semieixo conjugado de $\mathbf{H}$, então a distância focal de $\mathbf{H}$ é $\sqrt{a^2 - b^2}$.

(b) Se a é a medida do semieixo transverso de $\mathbf{H}$ e b é a medida do semieixo conjugado de $\mathbf{H}$, então a distância focal de $\mathbf{H}$ é $\sqrt{a^2 + b^2}$.

(c) Há infinitos pontos de $\mathbf{H}$ que pertencem ao seu retângulo fundamental.

(d) Para todo $\varepsilon > 0$, existe um ponto de $\mathbf{H}$ cuja distância até a assíntota mais próxima é menor que ε. Em outras palavras: certas partes de $\mathbf{H}$ estão arbitrariamente próximas (i.e., tão próximas quanto se queira) das assíntotas.

(e) Para todo $\varepsilon > 0$, existe um ponto de $\mathbf{H}$ cuja distância até a assíntota mais próxima é maior que ε. Em outras palavras: certas partes de $\mathbf{H}$ estão arbitrariamente distantes (i.e., tão distantes quanto se queira) das assíntotas.

Resposta. (d). □

Questão 8. Numa parábola, o parâmetro focal é:

(a) a distância de um foco ao outro.

(b) a distância da reta diretriz ao foco.

(c) mais ou menos a distância da diretriz ao foco, dependendo de para onde está voltada a concavidade.

(d) o comprimento do seu *latus rectum*.

(e) a média aritmética $(d_1 + d_2)/2$, onde d_1 é a distância da diretriz ao vértice e d_2 é a distância do vértice ao foco.

Resposta. (e). □

Questão 9. Numa elipse, um segmento de reta que NÃO É uma corda é:

(a) qualquer semieixo menor.

(b) o eixo maior.

(c) o eixo menor

(d) qualquer *latus rectum*.

(e) qualquer segmento que liga um vértice do eixo maior a um vértice do eixo menor.

Resposta. (a). □

Questão 10. Um tipo de conjunto que *não pode* ser interseção de uma hipérbole com uma reta é:

(a) conjunto vazio.

(b) conjunto formado por um único ponto.

(c) uma reta.

(d) um par de pontos.

(e) nenhum dos anteriores.

Resposta. (c). □

Questão 11. Para qualquer elipse **E** num plano π, é correto afirmar que:

(a) todos os pontos do retângulo fundamental de **E** estão na região do plano π que é delimitada por **E**.

(b) a coroa fundamental de **E** está completamente contida no retângulo fundamental de **E**.

(c) o retângulo fundamental de **E** está completamente contido na coroa fundamental de **E**.

(d) **E** está completamente contida na interseção de seu retângulo fundamental com sua coroa fundamental.

(e) a interseção do retângulo fundamental de **E** com a coroa fundamental de **E** está completamente contida em **E**.

Resposta. (d). □

Nas questões 12–30, considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas Oxy.

Questão 12. A elipse $9x^2 + y^2 = 16$ tem semieixos maior e menor medindo, respectivamente,

(a) 9 e 1.

(b) 9/16 e 1/16.

(c) 4 e 4/3.

(d) 3/4 e 1/4.

(e) 3 e 1.

Resposta. (c). □

Questão 13. A elipse $24x^2 + 36y^2 = 72$ tem eixos maior e menor medindo, respectivamente,

(a) 36 e 24.

(b) $\sqrt{2}/2$ e $\sqrt{3}/3$.

(c) 4 e 4/3.

(d) 3 e 2.

(e) $2\sqrt{3}$ e $2\sqrt{2}$.

Resposta. (e). □

Questão 14. A hipérbole $x^2 = 36 + y^2$ tem:

(a) focos sobre o eixo x, distando, um do outro, $12\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

(b) focos sobre o eixo y, distando, um do outro, $12\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

(c) focos sobre o eixo x, distando, um do outro, $6\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

(d) focos sobre o eixo y, distando, um do outro, $6\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

(e) focos sobre a reta $y = x$, distando, um do outro, $8\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

Resposta. (a). □

Questão 15. Seja $C : x^2 + y^2 = 9$. A translação do sistema de coordenadas Oxy para o ponto $P = (2, 2)$ resulta num sistema de coordenadas Pst com relação ao qual C pode ser descrita pela equação

(a) $s^2 + 4s + t^2 + 4t = 1$.

(b) $s^2 - 4s + t^2 - 4t = 1$.

(c) $s^2 + t^2 = 9$.

(d) $s^2 + t^2 = 13$.

(e) $s^2 + t^2 = 5$.

Resposta. (b). □

Questão 16. Se uma elipse tem centro na origem, vértice no ponto $(-4, 0)$ e passa pelo ponto $(1, 1)$, então sua equação é

(a) $x^2 + 15y^2 = 16$.

(b) $x^2 + 16y^2/15 = 1$.

(c) $16(x^2 + y^2/15) = 1$.

(d) $16x^2/15 + y^2 = 1$.

(e) $15x^2 + y^2 = 16$.

Resposta. (a). □

Questão 17. Se uma hipérbole tem centro na origem, focos sobre o eixo x e passa pelos pontos $(3, -\sqrt{10})$ e $(3\sqrt{2}, 5)$, então sua equação é

(a) $(-5x + 3y)(5x + 3y) = 15$.

(b) $x^2/5 - y^2/3 = 1$.

(c) $-x^2/5 + y^2/3 = 1$.

(d) $5x^2 - 3y^2 = 15$.

(e) $-5x^2 + 3y^2 = 15$.

Resposta. (d). □

Questão 18. A parábola que tem vértice na origem, foco na parte positiva do eixo x e parâmetro focal $p = 5/2$ tem equação

(a) $y = 10x^2$.

(b) $x = 2y^2/5$.

(c) $y^2 = 40x$.

(d) $x^2 = 5y/2$.

(e) $y^2 = 10x$.

Resposta. (e). □

Questão 19. A parábola que tem vértice na origem, foco na parte negativa do eixo y e parâmetro focal $p = 10$ tem equação

(a) $x = -10y^2$.

(b) $y = -2x^2/5$.

(c) $x^2 = -40y$.

(d) $y^2 = -5x/2$.

(e) $x^2 = -10y$.

Resposta. (c). □

Questão 20. A equação $((2x - 3y)(2x + 3y))^2 = 1$ descreve:

(a) uma hipérbole.

(b) duas retas concorrentes.

(c) duas retas paralelas.

(d) uma união de duas hipérboles.

(e) uma união de uma hipérbole e suas duas assíntotas.

Resposta. (d). □

Questão 21. A equação $((2x - 3y)(2x + 3y))^2 = 0$ descreve:

(a) uma união de duas hipérboles.

(b) uma hipérbole.

(c) duas retas concorrentes.

(d) duas retas paralelas.

(e) uma união de uma hipérbole e suas duas assíntotas.

Resposta. (c). □

Questão 22. A equação $(x^2 + 3y^2)^3 = 0$ descreve:

(a) o conjunto vazio.

(b) um conjunto formado por um único ponto.

(c) duas retas concorrentes.

(d) duas retas paralelas.

(e) uma união de três retas que se intersectam num único ponto.

Resposta. (b). □

Questão 23. A equação $(x^2 - 3y^2)^2 = 1$ descreve:

(a) uma hipérbole.

(b) duas retas concorrentes.

(c) duas retas paralelas.

(d) uma união de duas hipérboles.

(e) uma união de quadro retas que se intersectam num único ponto.

Resposta. (d). □

Questão 24. As assíntotas da hipérbole $x^2/25 - y^2/16 = 1$ são definidas pelas equações

(a) $a = 5$ e $b = 4$.

(b) $x = \pm 5$ e $y = \pm 4$.

(c) $y = -5x/4$ e $y = 5x/4$.

(d) $y = -16x/25$ e $y = 16x/25$.

(e) $y = -4x/5$ e $y = 4x/5$.

Resposta. (e). □

Questão 25. As assíntotas da hipérbole $-25x^2 + 16y^2 = 100$ são definidas pelas equações

(a) $a = 2$ e $b = 5/2$.

(b) $x = \pm 5$ e $y = \pm 4$.

(c) $y = -5x/4$ e $y = 5x/4$.

(d) $y = -16x/25$ e $y = 16x/25$.

(e) $y = -4x/5$ e $y = 4x/5$.

Resposta. (c). □

Questão 26. O retângulo fundamental da elipse de equação $x^2/100 + y^2/225 = 1$ é definido por:

(a) $-10 \le x \le 10$ ou $-15 \le y \le 15$.

(b) $-100 \le x \le 100$ ou $-225 \le y \le 225$.

(c) $-10 \le x \le 10$ e $-15 \le y \le 15$.

(d) $-100 \le x \le 100$ e $-225 \le y \le 225$.

(e) $10 \le |x - y| \le 15$.

Resposta. (c). □

Questão 27. O retângulo fundamental da hipérbole de equação $-x^2/9 + y^2/25 = 1$ é definido por:

(a) $|x| \le 3$ ou $|y| \le 5$.

(b) $-9 \le x \le 9$ ou $-25 \le y \le 25$.

(c) $|x| \le 3$ e $|y| \le 5$.

(d) $-9 \le x \le 9$ e $-25 \le y \le 25$.

(e) $3 \le |x - y| \le 5$.

Resposta. (c). □

Questão 28. As distâncias do ponto $(6\sqrt{2}, 6)$ até os focos da hipérbole $x^2 = 36 + y^2$ são:

(a) 18 e 6.

(b) $6\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$ e $6\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.

(c) $6\sqrt{6}$ e $6\sqrt{2}$.

(d) $6\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $6\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

(e) $6\sqrt{11 - 2\sqrt{2}}$ e $6(1 + \sqrt{2})$.

Resposta. (a). □

Questão 29. A equação

$$(x - y)^2 = 2x(-y + x/2) + 4$$

descreve:

(a) um par de retas paralelas.

(b) um par de retas concorrentes.

(c) uma reta.

(d) uma parábola.

(e) o conjunto vazio.

Resposta. (a). □

Questão 30. A equação

$$y + 2 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

descreve:

(a) um par de retas paralelas.

(b) um par de retas concorrentes.

(c) uma reta.

(d) uma parábola.

(e) o conjunto vazio.

Resposta. (d). □

UNIVASF, Colegiado de Eng. de Produção | E-mail: joao.alvesj@univasf.edu.br