UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

UNIVASF

Lista de Exercícios – Cálculo Diferencial e Integral I
2019.2 – Turma A1
Prof.: Tuanny Maciel

1. Mostre, usando a definição, que as funções abaixo são deriváveis.

a. $y = x^2 + 1$;
b. $y = 2x^3$;
c. $y = x^2 - 5$;
d. $y = \frac{1}{x+1}$.

2. Considere a função real dada por $f: \begin{cases} -x; se\ x \leq 0 \\ 2, se\ x > 0 \end{cases}$. Calcule as derivadas laterais $f'_+(0),\ f'_-(0)$. É correto afirmar que existe a derivada no ponto zero?

3. Existe algum ponto no qual a função $f(x) = |x^2 - 4x|$ não é diferenciável? Justifique.

4. Encontre o valor das variáveis a e b para que a função abaixo seja diferenciável no ponto $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & se\ x \leq 1 \\ ax + b, & se\ x > 1 \end{cases}$$

5. Determine o coeficiente angular da reta tangente aos gráfico da função f no ponto P indicado em cada item.

a. $f(x) = 3 - 2x;\quad P(-1,\ 5)$
b. $f(x) = 2x^2 - 4,\quad P(1, -2)$
c. $f(x) = 3x - t^2;\quad P(-2, -2)$
d. $f(x) = 4 - x^2;\quad P(2, 0)$
e. $f(x) = \frac{3}{2}x + 1;\quad P(-2, -2)$
f. $f(x) = t^2 + 3;\quad P(-2,\ 7)$

6. Determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ no ponto $x = 16$.

7. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2, se\ x \leq 1 \\ 2, se\ x > 1 \end{cases}$. A função é contínua no ponto $x = 1$? A função é diferenciável no ponto $x = 1$?

8. Sendo $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x$, calcule $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ e $f^{18}(x)$.

9. Calcule a derivadas de primeira ordem das funções abaixo:

a. $f(x) = 7x^3 + 25x^2 + 3$
b. $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$
c. $f(x) = e^x \cos(x)$
d. $f(x) = (3 - 2senx)^5$
e. $f(x) = \arccos(x)$
f. $f(x) = \arccos(e^x)$
g. $f(x) = \sqrt{xe^x + x}$
h. $f(x) = \ln(senx)$
i. $f(x) = 2x + 5\cos^3 x$

10. Uma partícula se move, no instante t, pela função $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t$.

a. Encontre as expressões que representam, em função de t, a velocidade e a aceleração da partícula;
b. Em qual instante a velocidade será nula?
c. Em qual instante a aceleração será nula?

11. Com base no estudo das derivadas e regras de derivação assinale o item correto com respeito a função e sua derivada.

a. Se $f(x) = 3x^2 + 4x$ então a sua função derivada é $f'(x) = 3x + 4$;
b. Se $f(x) = e^{-x}$, então a sua função derivada é $f'(x) = -e^{-x-1}$;
c. Se $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, então a sua derivada $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$;
d. Se $f(x) = sen(x)$, a derivada será $f'(x) = -\cos(x)$;
e. Se $f(x) = \frac{1}{x}$, a derivada será $f'(x) = \ln(x)$.

12. Assinale a alternativa que determina a equação da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto (2, 4).

a. $y = 4x - 4$
b. $y = 4x$
c. $y = x - 4$
d. $y = 4x + 8$
e. $y = 2x^2$

13. Seja a função $f(x) = \begin{cases} x^2; se\ x \leq 1 \\ 2, se\ x > 1 \end{cases}$.

a. Esboce o gráfico da função f;

b. Mostre f é contínua em $x = 1$;

c. Mostre que f é diferenciável em $x = 1$.

14. Suponha $x = x(t)$ seja diferenciável em R. Se $y = \frac{1}{x^2+1}$, verifique que, para todo $t \in R$, $\frac{dy}{dt} = -2xy^2\frac{dx}{dt}$.

15. Verifique que $y = xe^{-x}$ é solução da equação $xy' = (1-x)y$.

16. O logaritmo de um número N>0, em uma base b, $0 < b \neq 1$, é definido por meio da equivalência $\log_b N = a \iff b^a = N$.

a. Mostre a propriedade de mudança de base $\log_b N = \frac{lnN}{\ln b}$;

b. Se f é definida por $f(x) = \log_b x\,, x > 0$, mostre que $f'(x) = \frac{1}{x.lnb}$.

17. (Teorema do Valor Médio) Suponha $a < b$ e seja $f\colon [a,b] \to R$ função contínua. Mostre que se f é diferenciável em (a,b) então existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{[f(a) - f(b)]}{b-a}$$

18. Já citamos ao longo do texto a relação entre a derivada e a velocidade média. Isto é, para calcularmos a velocidade de determinada partícula, por exemplo, basta termos conhecimento do "espaço" percorrido por ela. Nesse sentido, analise a situação abaixo e encontre o que se pede.

"O movimento de um objeto ocorre ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a função horária s = t^2 + 2t – 3. Sabendo-se que a unidade de comprimento é o metro e de tempo, o segundo, calcule a velocidade no instante t_0 = 2 s."

a. 8m/s

b. 4m/s

c. 6m/s

d. 10m/s

e. 0 m/s

19. O lucro de uma empresa pela venda diária de x peças, é dado pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 40$. Quantas peças devem ser vendidas diariamente para que o lucro seja máximo? (Dica: Utilize a teoria de máximos e mínimos)

a. 5 peças
b. 4 peças
c. 6 peças
d. 7 peças
e. 2 peças

20. O lucro de uma empresa, em uma determinada medida, pela venda diária de x peças, é dado pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 40.$ Determine o lucro máximo? (Dica: Utilize a teoria de máximos e mínimos)

a. 9
b. 6
c. 7
d. 8
e. 5

21. Suponha que a equação de demanda para uma certa mercadoria seja $p = 4 - 0{,}0002x$, onde x é o número de unidades produzidas semanalmente e p reais é o preço de cada unidade. O número do custo total da produção de x unidades é $800 + 3x$. Se o lucro semanal deve ser o maior possível, encontre o número de unidades que serão produzidas por semana, o preço de cada unidade e o lucro semanal.

a. $x = 2000; p = 3{,}00; L = 450{,}00$
b. $x = 2500; p = 3{,}00; L = 450{,}00$
c. $x = 2500; p = 3{,}50; L = 450{,}00$
d. $x = 2000; p = 3{,}00; L = 450{,}00$
e. $x = 1500; p = 3{,}00; L = 450{,}00$

22. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - 4x$. Analise os itens abaixo e marque a alternativa correta:

a. A função é decrescente no intervalo $[-1, 3]$;
b. A função é decrescente para valores maiores que 2;
c. A função é crescente para valores menores que 1;

d. A função é sempre crescente pois se trata de uma função de 2° grau;

e. A função é crescente para todo x maior que 2.

23. Um Importador de café brasileiro calcula que consumidores locais comprarão aproximadamente $D(p) = \frac{4374}{p^2}$ quilogramas de café por semana, quando o preço brasileiro for de **p** dólares por quilograma. Estima-se que daqui a **t** semanas o preço do café brasileiro importado será $p(t) = 0{,}02t^2 + 0{,}1t + 6$ dólares por quilograma. Qual será a taxa de variação da demanda semanal de café daqui a **10** semanas?

a. 5 unidades semanais;

b. 6 unidades semanais;

c. 4 unidades semanais;

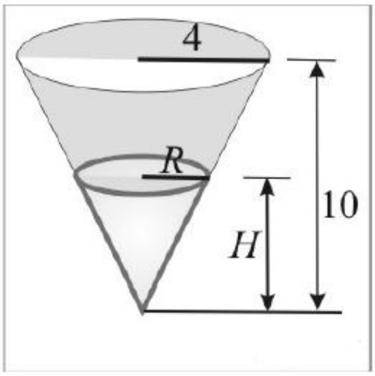
d. 25 unidades semanais;

e. 13 unidades semanais.

24. A figura ao lado mostra um reservatório cônico de 10m de altura e 4m de raio contendo água, que escoa a uma vazão de $5m^3/h$.

a. Qual a relação entre as variáveis R e H?

b. A que taxa o nível da água diminui, quando H = 6m?



25. Uma piscina está sendo esvaziada de tal forma que $V(t) = 300.(20 - t)^2$ representa o número de litros de água na piscina t horas após o início da operação. Calcule a velocidade (instantânea) de escoamento da água ao cabo de 8 horas e a velocidade média desse escoamento no mesmo tempo.

26. Seja a função $y = 12x - x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Classifique como verdadeiro(V), ou falso (F) as afirmações abaixo:

a. A função possui dois pontos críticos; ( )

b. Um dos pontos críticos é um ponto de inflexão; ( )

c. No intervalo (-2, 2) a função é sempre crescente; ( )

d. O ponto máximo é atingido quando $x = 2$. (   )

27. Calcule os limites abaixo:

a. $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-x}$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{x}$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - sen\, x}{x}$

d. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^4}{e^{3x}}$

e. $\lim_{x\to 0} \frac{senx\, sen(2x)}{xsen(3x)}$

f. $\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x^2)}{3x}$

g. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)}{1+senx}$